Übungsblatt 1
E2 Wärmelehre

Besprechung ab Do 24.4.
Ideales Gas, Gleichverteilungssatz und Thermodynamische Potentiale

1. (leicht) Eine Plastiktüte mit 2l Luft (ideales Gas) wird bei 20°C bei 1 bar mit einem Unterseeboot 1km tief in den Ozean gebracht. Welchen Druck erzeugt die Wassersäule (Wasser inkompressibel annehmen, Dichte 1kg/l, g=10m/s²)? Welches Volumen hat dann die Luft bei einer Wassertemperatur von 3°C?

2. (leicht) Was ist die mittlere Geschwindigkeit von N_2 (Molekulargewicht MW=28g/mol) und H_2 (MW=2g/mol) bei 20°C ? Setzen Sie den Gleichverteilungssatz an und nähern Sie $\overline{u^2} \approx \bar{u}^2$. Welche physikalische Konstante kommt Ihnen bei der Größenordnung der Geschwindigkeit in den Sinn?

3. (knifflig) In einem Hagelsturm treffen die Hagelkörner (2g) mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s auf ein Fenster mit der Fläche (0.5m)^2 im Winkel von 60° vom Lot mit einer Frequenz von 30 Hz. Welchen Druck erzeugt der Hagel? Vergleichen Sie mit dem atmosphärischen Druck.

4. a) Benutzen Sie die kinetische Herleitung des Drucks des idealen Gases aus der Vorlesung, um eine typische Zeit abzuschätzen, in der 1l Luft (Molekulargewicht 15g/mol) bei Raumtemperatur durch ein 1mm² Loch in ein äußeres Vakuum entkommt. Sie sollten auf eine Differentialgleichung kommen der Form $dN/dt = -N/\tau$ mit einer Abfallzeitkonstanten τ. Gelöst wird diese Gleichung mit dem Ansatz $N(t) = \text{const} \cdot e^{-t/\tau}$ (kniffelig)
   b) Ein Fahrradreifen hat ein Loch, welches die Luft innerhalb einer Stunde entweichen läßt. Wie groß in etwa ist das Loch?

5. Mathematische Aufwärmübung:
   a) Zeigen Sie, daß mit $f = pV$ gilt $df = pdV + Vdp$ (mittel)
   b) Nehmen Sie rein fiktiv an, die innere Energie U(S,V,N) wäre gegeben mit $U = S^2V^3N^{-2}$. Was folgt damit aus der Fundamentalrelation $dU = TdS - pdV + \mu dN$ für die Größen Temperature T, Druck p und chemisches Potential μ ? Tip: warum ist z.B.

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)\bigg|_{V,\,N} ?$$

   Vergleichen Sie mit einer mehrdimensionalen Taylorentwicklung von U. (mittel)

6. Die Entropie eines idealen Gases ist gegeben durch (Sackur-Tetrode Gleichung)

$$S(U, V, N) = Nk\left[\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\right] = Nk[\ln(VU^{3/2}N^{-5/2}) + \text{const}]$$

   mit Teilchenzahl N, Boltzmannkonstante k, Volumen V, Teilchenmasse m, innerer Energie U und Planck'sches Wirkungsquantum h. Im folgenden reicht der deutlich einfachere Term auf der rechten Seite aus (Warum?).
   a) Zeigen Sie explizit, daß die Entropie S eine extensive Größe ist, d.h. proportional mit N oder V ansteigt. Tip: Sie werden den Gleichverteilungssatz benötigen. (knifflig)
   b) Formen Sie die Fundamentalrelation $dU = TdS - pdV + \mu dN$ nach dS um und zeigen Sie, warum die Entropie von der inneren Energie U, dem Volumen V und der Teilchenzahl N abhängt (leicht)
   c) Zeigen Sie damit die folgenden drei Relationen: (leicht)

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)\bigg|_{V,\,N} \qquad \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)\bigg|_{U,\,N} \qquad \frac{\mu}{T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)\bigg|_{U,\,V}$$

   d) Rechnen Sie die ersten zwei Relationen mit obiger Entropie aus. Erkennen Sie sie die Terme wieder? (mittel)
   e) Rechen Sie den dritten Term für μ/T aus, benutzen Sie nun den vollständigen Ausdruck für S. Zeigen Sie mit dem Gleichverteilungssatz: $\mu = -kT\ln(V/N) + \text{const}(T)$. Dieser Term ist wenig bekannt, spielt aber bei der Diffusion von Gasmischungen eine große Rolle. (knifflig)