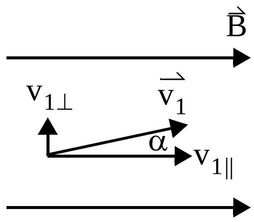
Übungsblatt 9
E2/E2p Elektromagnetismus

Besprechung ab Do 3.7. (Vorlesung 6-7)

1. (mittel) Magnetfelder
   (a) Berechnen Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb eines mit Strom I durchflossenen Kabels mit Radius a. Nehmen Sie hierzu an, daß der Strom im Inneren des Leiters homogen verteilt ist.
   (b) Berechnen Sie das Magnetfeld innerhalb eines Koaxialkabels welcher mit Strom I durchflossen wird (innerer Stromleiterradius a, äußere Abschirmung bei Radius b soll eine vernachlässigbare Dicke aufweisen). Der Strom im inneren Kern fließt entgegen dem äußeren Strom in der Abschirmung. Welche Eigenschaft des externen Magnetfelds bewirkt die Abschirmung?
2. (mittel) Geladenes Teilchen im Magnetfeld
   Ein Elektron startet von einem Punkt in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ mit einer Geschwindigkeit $v_1 << c$ ($v_{1\perp}, v_{1\|} \cong v_1$). Sein Geschwindigkeitsvektor und die Feldlinienrichtung schließen dabei den Winkel α ein.



   a) Beschreiben Sie qualitativ und quantitativ die Bahn des Elektrons im Magnetfeld.
   b) Ein zweites Elektron mit einer Geschwindigkeit v_2 ($v_{2\perp} = 2v_{1\perp}, v_{2\|} = v_{1\|}$) startet vom selben Ausgangspunkt wie das erste Elektron unter einem neuen Winkel β dieses homogene Magnetfeld. Nach welcher Zeit und welcher Strecke treffen die beiden Elektronen wieder zusammen?
3. (mittel) Ampère aus Biot-Savart
   Wenden Sie das Biot-Savart'sche Gesetz für einen geraden, ausgedehnten Leiter an. Aus dem Durchflutungsgesetz folgt für das Magnetfeld im Abstand r_0 vom Leiter (siehe Aufgabe 1):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I \qquad (1)$$

   (a) Wenn Sie ganz naiv das Biot-Savart Gesetz

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (2)$$

   ansetzen, könnten Sie haarscharf schließen, daß

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2}$$

   Welche 3 Dinge (oder mehr?) würden Sie dabei falsch machen?
   (b) Integrieren Sie ordentlich über die Drahtlänge $\vec{dl}$ indem Sie die Geometrie des Kreusproduktes berücksichtigen. Sie sollten nun (1) aus (2) herleiten können.

4. (mit Vorlesung einfach, sonst mittel) Herleitung Verschiebungsstrom
Ein Kondensator wird mit einem Strom I aufgeladen. Nehmen Sie einen Luft-Plattenkondensator mit einer Fläche A, Abstand d und einer Dielektrizitätskonstanten von $\varepsilon=1$ an.
(a) Rechnen Sie die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes $d\vec{E}/dt$ im Kondensator aus.
(b) Um der geraden Zuleitung des Kondensators entsteht ein magnetisches Feld aufgrund des Stromes I. Rechnen Sie mittels $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ das Magnetfeld im Abstand r aus.
(c) Dasselbe Magnetfeld muß auch durch $d\vec{E}/dt$ im Kondensator entstehen. Zeigen Sie, daß Sie hierfür $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 d\vec{E}/dt$ ansetzen müssen, um dasselbe Magnetfeld zu erzielen: den sogenannten Verschiebungsstrom.

5. (mittel) Hall-Effekt und Magnetohydrodynamischer Generator
Mit einem sogenannten Magnetohydrodynamischen Generator (MHDG) kann man direkt Strom aus dem gerichteten Plasma einer Verbrennung gewinnen (z.B. http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetohydrodynamic_generator). Das Funktionsprinzip ist weitgehend analog zum Hall-Effekt und basiert auf der Lorentzkraft, welche frei bewegliche Ladungsträger im bewegten Plasmastrom durch ein äußeres Magnetfeld erfahren. Faraday hat sich 1832 überlegt, ob man damit nicht direkt elektrische Energie aus einem Fluß (z.B. Rhein, Donau) gewinnen könnte. Dazu seien zwei Elektroden im Abstand von 300m an gegenüberliegenden Ufern angebracht. Der Fluß habe eine homogene Flußgeschwindigkeit von 18km/h. Die senkrechte Erdmagnetfeldkomponente beträgt in Europa etwa 10^{-5}T.
a) Welche Spannung wird man unter diesen Voraussetzungen an den Elektroden maximal messen (Innenwiderstand vernachlässigt)?
b) Worin liegt der Unterschied der Spannungsgeneration zwischen dem Hall-Effekt und dem MHDG ?

6. (mittel-knifflig, 2 Studenten rechnen vor) Vektorpotential um ein Stromdurchflossenes Kabel.
(a) Das Magnetfeld B kann aus einem Vektorpotential A abgeleitet werden durch $B = \mathrm{rot}A$. Deshalb gilt:

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mu_0\vec{j}$$

Leiten Sie hieraus für die x-Komponente die Laplace-Gleichung

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x$$

her, indem Sie die Divergenzfreiheit von A benutzen ($\mathrm{div}\vec{A} = 0$) und die Vertauschung der Ableitungen erlauben nach dem Schema:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}A = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}A$$

Aus Symmetriegründen gilt die gleiche Relation auch entlang y und entlang z.
(b) Berechnen und skizzieren Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ innerhalb eines mit Strom I durchflossenen Kabels mit Radius a, welches in z-Richtung zeigt direkt aus der gewonnenen Laplace-Gleichung für A_z. Nehmen Sie hierzu an, daß der Strom im Leiter homogen verteilt ist. Sie müssen dazu wie in Übungsblatt 7, Aufgabe 4b den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten lösen:

$$\Delta A_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}A_z$$

Wie Sie sehen, ist die Lösung für das elektrische Potential φ eines geladenen Leiters mit Ladungsdichte ρ und für das Vektorpotential $\vec{A}$ in Richtung entlang eines stromdurchflossenen Leiters sehr ähnlich!